Après avoir vu la théorie du dénombrement et autres lois binomiales, nous allons nous attaquer à la pratique au travers d'un petit problème.
A l'origine, celui-ci s'adressait aux élèves de Terminale ES ayant suivi la spécialité mathématique. Il s'agit d'ailleurs d'un exercice de Bac ES noté sur cinq points qui a été remanié et alourdi...
Le présent problème est prévu pour être traité en une heure. Cela dit, chacun est libre de prendre son temps. Voici donc :

Dénombrement en action !

Un problème pour en comprendre l'usage.

Mode d'emploi :
Ce document s'articule en deux parties. L'énoncé du problème sur cette première page. Le corrigé détaillé de celui-ci se trouve sur la seconde page et les suivantes.
Ce document a été conçu pour être soit consulté à l'écran ou bien alors imprimé. A cet effet des liens hypertextes permettent de basculer de l'énoncé au corrigé. Il va sans dire que ces liens hypertextes ne passent pas l'épreuve de l'impression.
Dans le cas où vous décèleriez une erreur, merci de nous en faire part. Elle sera immédiatement corrigée.

L'énoncé du problème.

Une entreprise de 36 salariés est constituée d'apprentis, d'ouvriers et de cadres. Parmi ces personnes, vingt-deux sont des hommes dont dix-huit ouvriers et trois cadres, six femmes sont cadres et une est apprentie.

1°) Une personne tous les matins.

Tous les matins, une personne est choisie au hasard et est interrogée sur les conditions de travail.
Calculer la probabilité pour que, un jour donné, la personne interrogée soit :

a) un apprenti.
b) un cadre, sachant que c'est un homme.
c) une femme, sachant que c'est une ouvrière.

2°) Quatre personnes tous les matins.

Afin de connaître le sentiment du personnel sur le passage aux trente-cinq heures, on interroge tous les matins quatre personnes choisies au hasard. Ils forment un groupe. Chaque tirage journalier est indépendant de ceux des autres jours.

2.a) Combien y a-t-il de groupes de quatre personnes possibles ?

2.b) Calculer la probabilité pour que, un jour donné :

1. Le groupe soit constitué d'un cadre et de trois ouvriers sans distinction de sexe.
2. Le groupe soit constitué d'au moins un cadre homme.
3. Le groupe soit constitué d'une cadre, de deux ouvrières et d'une apprentie sachant que toutes les personnes composant le groupe sont des femmes.

L'une des femmes se prénomme Patricia.

2.c) Montrer que la probabilité pour qu'un jour donné Patricia fasse partie du groupe des personnes interrogées est égale à $\frac{1}{9}$.

2.d) Cette société travaille cinq jours par semaine.
Déterminer la probabilité pour que Patricia soit interrogée une seule fois en deux semaines.
Quelle est la probabilité pour que Patricia soit interrogée au moins deux fois en deux semaines ?
Note : on considère que les choix successifs des groupes de quatre personnes sont deux à deux indépendants.

Le corrigé du problème.

Une entreprise de 36 salariés est constituée d'apprentis, d'ouvriers et de cadres.
Parmi ces personnes, vingt-deux sont des hommes dont dix-huit ouvriers et trois cadres, six femmes sont cadres et une est apprentie.

Avant d'entamer les hostilités, encore faut-il savoir ce qu'est la situation et connaître exactement la répartition des salariés de l'entreprise.
La lecture et l'exploitation de l'énoncé nous conduit au tableau suivant :

	Cadres	Ouvriers	Apprentis	**Total**
Hommes	3	18	1	22
Femmes	6	7	1	14
Total	9	25	2	36

A présent que nous connaissons en détail l'effectif de l'entreprise, nous allons pouvoir répondre à toutes les questions posées.
Précisons encore que nous sommes en situation d'équiprobabilité car toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisie. Il n'y a aucun favoritisme qui tienne !

1°) Une personne tous les matins.

Tous les matins, une personne est choisie au hasard et est interrogée sur les conditions de travail.
Calculer la probabilité pour que, un jour donné, la personne interrogée soit :

a) un apprenti.
b) un cadre, sachant que c'est un homme.
c) une femme, sachant que c'est une ouvrière.

Analysons la situation ! Il s'agit à chaque fois d'un tirage d'une personne à choisir parmi un certain nombre. Voyons cela dans le détail !

a) Probabilité que la personne interrogée soit un apprenti.
Cette question peut prêter à confusion. En effet, s'agit-il de la catégorie apprenti (hommes et femmes confondus) ou parle-t-on d'apprenti-homme ? Plusieurs compréhensions sont possibles. Nous opterons pour la première.
Pour que cet événement soit réalisé, il faut choisir l'un des deux apprentis parmi les 36 salariés.
La probabilité d'interroger un apprenti est donc de $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

b) Probabilité que la personne interrogée soit un cadre sachant que c'est un homme.
Le terme "sachant que" indique qu'il s'agit d'une probabilité conditionnelle. Pourtant, pour répondre à cette question, point de besoin de grande formule car le bon sens peut suffire !
Pour que l'événement soit réalisé, il faut interroger un des 3 cadres-hommes.
Comme l'on sait que la personne interrogée est nécessairement un homme, l'ensemble de référence se réduit donc à 22 candidats.
La probabilité est donc égale à $\frac{3}{22}$.

c) La probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie des ouvriers.
Là encore, il s'agit de probabilité conditionnelle. Mais il est possible de s'en sortir en faisant preuve d'un peu de bon sens !
Pour que l'événement se réalise, il faut interroger l'une des 7 femmes-ouvriers.
Maintenant, on sait que la personne interrogée est nécessairement un ouvrier (au sens large). Cela laisse le choix entre 25 candidats.
La probabilité de cet événement est donc égale à $\frac{7}{25}$.

2°) Quatre personnes tous les matins.

Afin de connaître le sentiment du personnel sur le passage aux trente-cinq heures, on interroge tous les matins quatre personnes choisies au hasard. Ils forment un groupe.
Chaque tirage journalier est indépendant de ceux des autre jours.

La situation vient de changer ! Elle s'assimile désormais à un tirage sans ordre. Cela implique donc l'utilisation des combinaisons et des C_n^p.

2.a) Combien y a-t-il de groupes de quatre personnes possibles ?

Constituer un groupe dans les conditions fixées revient en fait à faire une combinaison de quatre éléments à choisir parmi 36.
Il y a donc en tout $C_{36}^4 = 58905$ groupes possibles.

2.b) Calculer la probabilité pour que, un jour donné :

1) Le groupe soit constitué d'un cadre et de trois ouvriers sans distinction de sexe.
2) Le groupe soit constitué d'au moins un cadre homme.
3) Le groupe soit constitué d'une cadre, de deux ouvrières et d'une apprentie sachant que toutes les personnes composant le groupe sont des femmes.

Nous savons que la situation équivaut à un tirage sans ordre. Nous savons aussi que tous les groupes sont équiprobables. En effet, il est bien précisé que tout est fait "au hasard". Donc là encore pas de favoritisme !
Voyons ces probabilités dans le détail !

1) Le groupe est constitué d'un cadre et de trois ouvriers sans distinction de sexe.
La question à se poser est combien peut-on constituer de telles quatre-combinaisons. Analysons ce type de groupe !

Ils sont tous de la forme :

1 cadre parmi 9	***3 ouvriers parmi 25***

Notre groupe est formé de deux sous-combinaisons : la première d'un élément cadre et la seconde de trois éléments ouvriers.

Il y a $C_9^1 = 9$ un-combinaisons avec un seul élément cadre.

Il y a $C_{25}^3 = 2300$ trois-combinaisons comprenant 3 ouvriers.

Il y a donc en tout $C_9^1 \times C_{25}^3 = 20700$ quatre-combinaisons comprenant un cadre et trois ouvriers.
Note : si l'on multiplie, c'est que pour chacun des neuf cadres choisis, il y a C_{25}^3 trois-combinaisons d'ouvriers possibles. Imaginez l'arbre...

La probabilité d'obtenir un groupe avec un cadre et trois ouvriers est donc égale à $\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre total de cas}} = \frac{20700}{58905} = \frac{460}{1309} \approx 0{,}351$

2) Le groupe est constitué d'au moins un cadre-homme.
"Au moins un cadre-homme" signifie qu'il peut y en avoir un, deux ou trois. Cela signifie donc qu'il y a quatre cas à envisager et donc qu'il y a beaucoup de boulot en perspective ! A moins de réfléchir...
Une des choses à savoir lorsque l'on traite de probabilité est que l'événement contraire de "au moins..." est "aucun...".
Nous allons donc nous intéresser à l'événement "aucun cadre-homme".
Combien y a-t-il de groupes ou de quatre combinaisons où il n'y a aucun cadre-homme ?
Constituer une telle combinaison revient à choisir quatre personnes parmi $36 - 3 = 33$ autres. Tout le monde sauf les cadres-hommes !

Il y a donc en tout $C_{33}^4 = 40920$ groupes sans cadre-homme.

Il vient donc que :

$$p(\text{"Au moins un cadre - homme"}) = 1 - p(\underbrace{\text{"Aucun cadre - homme"}}_{\text{C'est l'événement contraire !}})$$

$$= 1 - \frac{40920}{58905} = \frac{109}{357} \approx 0{,}305$$

3) Le groupe est constitué d'une cadre, de deux ouvrières et d'une apprentie <u>sachant que</u> toutes les personnes composant le groupe sont des femmes.
La première remarque que certains formuleront est : "est-il bien utile de préciser que toutes les personnes composant le groupe sont des femmes ?". Après tout, il est bien dit "une cadre, deux ouvrières et une apprentie".
La réponse est oui car cela crée une différence avec les deux cas précédents. <u>L'ensemble de référence a changé</u> : on doit à présent s'intéresser aux seules quatre-combinaisons de femmes.

Il y a en tout $C_{14}^4 = 1001$ groupes ne comportant que des femmes.

Il nous reste à dénombrer les groupes comportant une cadre, deux ouvrières et une apprentie. Ils sont tous de la forme.

1 cadre parmi 6	***2 ouvrières parmi 7***	***1 apprentie parmi 1***

Notre quatre-combinaisons est donc composées de 2 une-combinaisons et de 1 deux-combinaisons.

Il existe $C_6^1 = 6$ une-combinaisons avec une femme-cadre.

Il existe $C_7^2 = 21$ deux-combinaisons avec deux ouvrières.

Il existe $C_1^1 = 1$ une-combinaison avec une apprentie.

Il y a donc en tout $C_6^1 \times C_7^2 \times C_1^1 = 126$ groupes avec une femme-cadre, deux ouvrières et une apprentie.

La probabilité recherchée est donc égale à $\frac{126}{1001} = \frac{18}{145} \approx 0{,}126$.

L'une des femmes se prénomme Patricia.
2.c) Montrer que la probabilité pour qu'un jour donné Patricia fasse partie du groupe des personnes interrogées est égale à $\frac{1}{9}$.

Cette question aurait pu faire partie des précédentes. Elle s'inscrit en tout cas dans la même démarche. Là encore, nous utiliserons la formule $\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre total de cas}}$.

Depuis la question 2.a, nous savons qu'il y a en tout $C_{36}^4 = 58905$ groupes au total.

Il nous faut déterminer le nombre de groupes où Patricia figure !
Tous ces groupes sont de la forme :

Patricia	***3 salariés à choisir parmi 35***

Ce qui différencie deux groupes avec Patricia est le choix des trois autres salariés. Ceux-ci doivent être choisis parmi les trente-cinq restants.

Il y a donc en tout $C_{35}^3 = 6545$ groupes où figure Patricia.

La probabilité que Patricia soit dans le groupe est donc égale à $\frac{6545}{58905} = \frac{1}{9}$.

D'où ce qui était demandé !

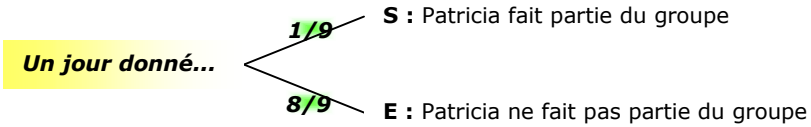
2.d) Cette société travaille cinq jours par semaine.
Déterminer la probabilité pour que Patricia soit interrogée une seule fois en deux semaines.
Quelle est la probabilité pour que Patricia soit interrogée au moins deux fois en deux semaines ?
Note : on considère que les choix successifs des groupes de quatre personnes sont deux à deux indépendants.

Avant toute action, analysons la situation !
Tous les jours, on interroge quatre personnes comme précédemment. La question qui se pose est : ***un jour donné, Patricia fait-elle partie du groupe ?***

D'après la question 2.c, nous savons que cette probabilité est égale à $\frac{1}{9}$.

Maintenant cette épreuve se répète durant dix jours (deux semaines de cinq jours). A chaque fois, on se pose la question de savoir si Patricia fait partie du groupe choisi.

Cette situation est assimilable à un schéma de Bernouilli à dix niveaux (un par jour) où l'épreuve de Bernouilli est la suivante :



On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès S c'est-à-dire le nombre de jours où Patricia a fait partie du groupe de personnes interrogées.

Cette variable aléatoire X obéit à la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{9}$.

Dans la suite, nous allons utiliser la formule :

$$p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Le terrain ayant été préparé, nous allons pouvoir traiter les questions.

Calculons la probabilité que Patricia soit interrogée une seule fois.
Compte tenu de ce qu'est la variable aléatoire X, il nous faut donc calculer $p(X = 1)$.

$$p(\underbrace{X = 1}_{\text{Une seule fois}}) = C_{10}^1 \times \left(\frac{1}{9}\right)^1 \times \left(\frac{8}{9}\right)^9 = \frac{1342177280}{3486784401} \approx 0{,}385$$

Patricia a donc un peu plus d'une chance sur trois d'être interrogée une seule et unique fois en deux semaines.

Intéressons-nous à la probabilité que Patricia soit interrogée au moins deux fois en deux semaines.
Pour cela, il nous faut calculer $p(X \geq 2)$. Là, nous avons le choix entre deux chemins :

- **La méthode bourrin !**
  La variable aléatoire peut prendre toutes valeurs entières entre 0 et 10. On écrit alors simplement que :
  $$p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + ... + p(X = 9) + p(X = 10)$$
  C'est la méthode la plus simple et surtout la plus longue.

- **La méthode la plus astucieuse : passer par l'événement contraire.**
  L'événement contraire de "$X \geq 2$" est l'événement "$X < 2$".
  On peut donc écrire que :
  $$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$$
  Nous connaissons déjà $p(X = 1)$. Il nous reste à déterminer $p(X = 0)$.
  On peut écrire que :
  $$p(X = 0) = C_{10}^0 \times \left(\frac{1}{9}\right)^0 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{10} = \frac{1073741824}{3486784401} \approx 0{,}307$$
  Finalement, il vient donc que :
  $$p(X \geq 2) = 1 - \underbrace{\frac{1073741824}{3486784401}}_{p(X=0)} - \underbrace{\frac{1342177280}{3486784401}}_{p(X=1)} = \frac{118985033}{387420489} \approx 0{,}307$$

Clairement, une méthode est plus rapide que l'autre...